На правах рукописи

Е.Фом

Фомина Елена Анатольевна

О ДВУМЕРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛЯХ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Томск – 2009

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Томский государственный университет»
на кафедре математического анализа

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Пестов Герман Гаврилович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Копытов Валерий Матвеевич

доктор физико-математических наук,
профессор Гриншпон Самуил Яковлевич

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Алтайский государственный университет»

Защита состоится 17 декабря 2009 года в 14 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36, второй корпус, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: г. Томск, пр. Ленина, 34а.

Автореферат разослан 12 ноября 2009 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 212.267.21 при ТГУ,
кандидат физико-математических наук,
доцент А.Н. Малютина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие поля и тесно связанное с ним понятие группы оформились только в XIX веке.

Г. Кантор (1845-1918) [6] одним из первых начал систематическое изучение понятия линейного порядка. В частности, он ввёл понятие вполне упорядоченного множества и начал изучение кардиналов и ординалов.

Теория упорядоченных групп и полей [1, 2] занимает заметное место в современной математике. Р. Бэр (1902-1979) начал изучение упорядоченных тел [25]. В последующем, стали исследоваться линейно и решёточно упорядоченные группы [7, 8, 26].

В августе 1900 года в своём докладе на II Международном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт (1862-1943) сформулировал вопрос о представимости положительного многочлена в виде суммы квадратов многочленов (17-я проблема Гильберта) [19]. Работая над этим вопросом, Э. Артин (1898-1962) и О. Шрайер (1901-1929) начали исследования по теории линейно упорядоченных полей [24]. Они нашли алгебраическую характеризацию полей, допускающих линейный порядок, который совместим с алгебраической структурой поля. Ими также было введено понятие формально вещественного поля и получен критерий линейной упорядочиваемости поля.

Строение сечений в упорядоченном поле даёт важную информацию о свойствах самого поля. По-видимому, Р. Дедекинд (1831-1916) был первым математиком, который использовал понятие сечения во множествах рациональных и вещественных чисел при построении своей теории вещественного числа [4, 27]. Известно, что каждое архимедово поле изоморфно некоторому подполю поля всех вещественных чисел с его естественной упорядоченностью [35]. Таким образом, первые упорядоченные поля, сечения в которых подверглись изучению, были подполями **R**. Со временем логика исследования упорядоченных полей привела к некоторой классификации сечений в упорядоченных полях.

Изучение неархимедовых полей привело к определению сечений Гёльдера (1859-1937) и фундаментальных сечений [3]. В 80-х годах прошлого века Г.Г. Пестовым [13] и Ф. Делон [28] было введено понятие алгебраического сечения.

В теории линейно упорядоченных полей существенную роль играют различные замыкания упорядоченного поля. Эти вопросы изучались, в частности, Р. Бэром [25]. Наиболее основательному изучению подверглись понятия вещественного, топологического и архимедовского замыканий, хотя Р. Бэр исследовал ещё и некоторые комбинации замыканий. Расширение поля до замыкания того или иного вида можно осуществить с помощью последовательности простых расширений – так называемых заполнений сечений [14].

Единственность линейного упорядочения вещественно замкнутого поля доказана Э. Артином и О. Шрайером в 1925 году. К концу 50-х годов прошлого века накопился большой материал в области упорядоченных алгебраичсских структур. Систематизация этого материала проведена венгерским математиком Л. Фуксом [23]. В 1969 году Ю.Л. Ершовым описана конструкция формально вещественного поля с заданным числом неизоморфных порядков [5].

Важной темой теории упорядоченных полей является построение упорядоченного поля с помощью той или иной конструкции. Известно, что фактор-структура кольца по максимальному идеалу есть поле. При определённых условиях на исходное кольцо поле частных является упорядоченным полем.

Определение линейного порядка возникло в результате исследования расположения точек на прямой. Поле вещественных чисел явилось первым примером линейно упорядоченного поля.

Различные подходы к обобщению понятия линейного порядка по размерности предпринимались многими математиками, начиная с Г. Кантора.

Систематическое изучение обобщений понятия порядка по размерности было предпринято в работах Э. Шпернера (1906–1980) [36] и Э. Глока [29].

Идея обобщения линейного порядка по размерности получила последовательное развитие в независимых работах Л. Новака [31-34] и Г. Г. Пестова [9-12]. В работах Г.Г. Пестова [16-18] и А.И. Терре [20, 22] введено определение двумерного порядка, двумерно упордоченного поля, определение верхнего конуса и получена характериация верхнего конуса поля.

В работах А.И. Терре [21] получены, в частности, следующие результаты.

Поле имеет характеристику нуль тогда и только тогда, когда оно допускает линейное или двумерное упорядочивание.

Поле характеристики нуль допускает единственное, с точностью до изоморфизма, двумерное упорядочивание тогда и только тогда, когда оно изоморфно полю алгебраических чисел над **Q**.

Все поля характеристики нуль можно разделить на три класса:

1) поля характеристики нуль, не являющиеся формально вещественными. Данные поля можно упорядочить двумерно, но не линейно;
2) формально вещественные поля, не допускающее изоморфного вложения ни в какое нормальное расширение поля **Q**. Поля этого класса как линейно, так и двумерно упорядочиваемы;
3) поля, изоморфно вкладываемые в некоторое нормальное расширение поля **Q**. Такие поля допускают только линейное упорядочивание.

Пестовым Г.Г. введено понятие бесконечно близкого элемента к базе двумерно упорядоченного поля [15], изучены некоторые свойства этих элементов, сформулированы теоремы.

Данная работа является логическим продолжением этого направления исследований.

Цель работы

1. Установить связь между функциями $\psi_a(x)$ и $\varphi(x)$, определёнными на двумерно упорядоченном поле.
2. Доказать, что множество бесконечно близких к базе P_0 элементов является подполем двумерно упорядоченного поля $\langle P, P^u \rangle$.
3. Получить критерий бесконечной узости двумерно упорядоченного поля.
4. На основе заданного линейно упорядоченного поля построить конструкцию бесконечно узкого поля.

Общая методика исследования. В диссертации используются методы линейной алгебры, теории полей характеристики нуль, теории линейно и двумерно упорядоченных полей, элементы дифференциального исчисления.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми. Основными результатами можно считать следующие.

1. Доказано тождество, связывающее функции $\psi_a(x)$ и $\varphi(x)$, определённые на двумерно упорядоченном поле.
2. Доказано, что множество элементов, бесконечно близких к базе двумерно упорядоченного поля, есть подполе этого поля.
3. Получен критерий бесконечной узости двумерно упорядоченного поля: двумерно упорядоченное поле является бесконечно узким тогда и только тогда, когда правый конус поля является положительным конусом поля.
4. Описана конструкция двумерно упорядоченного бесконечно узкого поля на основе заданного линейно упорядоченного поля.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа представляет собой законченное научное исследование. Результаты работы имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы в исследованиях по теории упорядоченных полей и теории полей характеристики нуль; в университетских спецкурсах для студентов старших курсов и аспирантов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях «Мальцевские чтения» в 2006, 2008 и 2009 годах (г. Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН); на Научной конференции молодых учёных, аспирантов и студентов ММФ ТГУ, посвящённой 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера (г. Томск, апрель 2007 года); на XII (г. Томск, апрель 2008 года) и XIII (г. Томск, апрель 2009 года) Всероссийских конференциях студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и образование» (ТГПУ); на Всероссийской конференции по математике и механике, посвящённой 130-летию ТГУ и 60-летию ММФ (г. Томск, сентябрь 2008 года).

Структура и объём работы. Диссертационная работа изложена на 69 страницах машинописного текста. Она состоит из списка обозначений, введения, четырёх глав и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы. Полная библиография включает 46 наименований, из них 10 – работы автора по теме диссертации.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение. Во введении изложена история вопроса, представлен обзор результатов, связанных с тематикой диссертации, сформулированы основные результаты.

Первая глава начинается с основных определений теории двумерно упорядоченных полей.

***Определение* 1.1.1.** Пусть $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2)$, $z = (a_3, b_3)$ – точки плоскости $\mathbf{R}^2$. Функция η_2 задаваемая формулой:

$$\eta_2(x, y, z) = sg\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = sg\begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_1) & (b_3 - b_1) \end{vmatrix},$$

называется *функцией стандартной ориентации плоскости* $\mathbf{R}^2$.

***Определение* 1.1.2.** Пусть M – произвольное непустое множество.
Функция ζ, определённая следующим образом:

$$\zeta: M^3 \to \{0, 1, -1\}, \forall A \subset M, |A| \le 5,$$

$$\text{существует инъекция } \phi: A \to \mathbf{R}^2, \text{ такая что}$$

$$\forall\ x, y, z \in A \text{ выполнено: } \zeta(x, y, z) = \eta_2(\phi(x), \phi(y), \phi(z)),$$

называется *функцией двумерного порядка*, заданной на множестве M.

***Определение* 1.1.3.** Поле P называется *двумерно упорядоченным* полем, если функция двумерного порядка ζ, заданная на P, согласована с алгебраической структурой поля.

Пусть $\langle P, \zeta\rangle$ есть двумерно упорядоченное поле; $a, b \in P$, $a \ne b$. Множество $\{x \in P | \zeta(a, b, x) = 0\}$ назовём *прямой, проходящей через точки* a, b.

***Определение* 1.1.4.** *Базой* P_0 двумерно упорядоченного поля $\langle P, \zeta\rangle$ называется множество:

$$P_0 = \{x \in P | \zeta(0, 1, x) = 0\}.$$

Иначе: *базой* двумерно упорядоченного поля называется прямая, проходящая через точки 0 и 1.

Определение **1.1.5.** *Верхним конусом* P^u поля $\langle P, \zeta\rangle$ называется множество:

$$P^u = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) \geq 0\}.$$

Выделяют *открытый верхний конус* $\overset{o}{P}{}^u$ поля $\langle P, \zeta\rangle$, определённый следующим образом:

$$\overset{o}{P}{}^u = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) > 0\} = P^u \setminus P_0.$$

Известно [15], что верхний конус однозначно определяет двумерный порядок в поле.

Пример **1.1.2.** Пусть F – произвольное линейно упорядоченное поле. В поле $F(i)$ введём двумерный порядок $\eta(z_1, z_2, z_3)$ следующим образом. Пусть $z_j = x_j + iy_j$, где $x_j, y_j \in F$ $(1 \leq j \leq 3)$. Тогда полагаем

$$\eta(z_1, z_2, z_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поле $\langle F(i), \eta\rangle$ является двумерно упорядоченным.

Определение **1.1.7.** В поле $\langle P, P^u\rangle$ зададим *предпорядок* $<_u$ следующим образом:

$$\forall x, y \in P, x <_u y \Leftrightarrow (y - x) \in P^u.$$

Определение **1.1.8.** Введём в P^u бинарное отношение $\succ$ следующим образом. Будем считать, что $y \succ x$, если:

1. $y \in P_0^-$, $x \in P^u \setminus P_0^-$, или
2. $yx^{-1} \in \overset{o}{P}{}^u$, если $y \in \overset{o}{P}{}^u$, $x \in P^u \setminus P_0^-$.

Лемма 1.1.2. Бинарное отношение $\succ$ есть строгое отношение предпорядка.

Определение **1.1.9.** *Правым конусом* P^r двумерно упорядоченного поля $\langle P, P^u\rangle$ называется множество:

$$P^r = \{x \in P \mid (x \in P^u, x^2 \in P^u \setminus P_0) \vee (x \in -P^u, x^2 \in -P^u \setminus P_0) \vee x \in P_0^+\}.$$

Пример **1.1.7.** В поле $\mathbf{C}$ с верхним конусом:

$$\mathbf{C}^u = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

правый конус есть множество:

$$\mathbf{C}^r = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \wedge z = 0\}.$$

Расположение элементов $\mathbf{C}^r$ в поле $\mathbf{C}$ поясняет данное название.

Определение **1.1.10.** В поле $\langle P, P^u\rangle$ зададим *предпорядок* $<$ следующим образом:

$$\forall x, y \in P, x < y, \text{ тогда и только тогда, когда } (y - x) \in P^r.$$

Определение **1.2.1.** Пусть $\langle P, P^u\rangle$ – двумерно упорядоченное поле с базой P_0. Элемент $a \in P$ называется *бесконечно близким к базе* P_0, если:

$$\forall n\ \forall r \in P_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in P^u$$

или

$$\forall n\ \forall r \in P_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in -P^u$$

Множество бесконечно близких к базе элементов обозначим через B.

Бесконечно близкий к базе элемент наглядно можно представить, как элемент с бесконечно малым аргументом.

В частности, элементы базы P_0 по определению являются бесконечно близкими к базе.

Пример **1.2.1.** Рассмотрим расширение $\mathbf{R}(\alpha)$ поля $\mathbf{R}$ с помощью бесконечно малой α и расширение $\mathbf{R}(\alpha, i)$ поля $\mathbf{R}(\alpha)$. В работе доказано, что элемент $(\pi + \alpha i)$ поля $P = \mathbf{Q}(\pi + \alpha i) \subset \mathbf{R}(\alpha, i)$, является бесконечно близким к базе $\mathbf{Q}$.

Далее в первой главе изучены некоторые свойства множества бесконечно близких к базе элементов. В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.2.1. Пусть $a \in B$. Если $a \in \mathring{P}^u$, то

$$\forall n\ \forall r \in P_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in \mathring{P}^u \cap P^r.$$

Теорема 1.2.2. $B + P_0 \subset B$.

Теорема 1.2.3. $P_0^+ B \subset B$.

Центральным результатом **второй главы** является доказательство тождества, связывающего функции $\psi_a(x)$ и $\varphi(x)$, определённые ниже.

Пусть a – бесконечно близкий к базе P_0 элемент. Для каждого $x \in P_0[a]$ определим в P_0 следующие два сечения:

$$\psi_a^-(x) = \{r \in P_0 \mid ra <_u x\};\ \psi_a^+(x) = \{r \in P_0 \mid x <_u ra\};$$
$$\varphi^-(x) = \{r \in P_0 \mid r < x\};\ \varphi^+(x) = \{r \in P_0 \mid x < r\}.$$

Известно [15], что указанные сечения фундаментальны. Элементы из непрерывного замыкания $\widetilde{P}_0$ поля P_0, которые производят эти сечения, обозначим соответственно через $\psi_a(x)$ и $\varphi(x)$.

Имеет место следующая

Теорема 2.2.3. (об основном тождестве). Пусть P есть двумерно упорядоченное поле. Если a есть бесконечно близкий к базе P_0 элемент, $F(x) \in P_0[x]$, то имеет место тождество:

$$\psi_a(F(a)) = F'(\varphi(a)) = \varphi(F'(a)).$$

Заметим, что с помощью этого тождества вопрос о принадлежности элемента a верхнему конусу сводится к более лёгкому вопросу о знаке многочлена F' в точке $\varphi(a)$.

В **третьей главе** получен критерий бесконечной близости элемента двумерно упорядоченного поля к базе этого поля.

Теорема 3.4.1. Элемент $a \in \overset{o}{P}{}^{u}$ является бесконечно близким к базе P_0 элементом тогда и только тогда, когда:

$$\forall n\ \forall \rho \in P_0\ (\rho > a) \Rightarrow (\rho - a)^n \in -\overset{o}{P}{}^{u}.$$

Основным результатом третьей главы является следующая

Теорема 3.5.5. Множество B бесконечно близких к базе элементов является подполем 2-упорядоченного поля $\langle P, +, \cdot\rangle$.

Четвёртая глава посвящена *бесконечно узким* двумерно упорядоченным полям.

Определение **4.1.1.** Двумерно упорядоченное поле $\langle K, K^u\rangle$ называется *бесконечно узким*, если каждый его элемент бесконечно близок к базе K_0.

На основе линейно упорядоченного поля K_0 построим бесконечно узкое поле K_1.

Теорема 4.1.2. Пусть K_0 – линейно упорядоченное поле, элемент a – трансцендентен над K_0. Рассмотрим поле $K_1 = K_0(a)$. Тогда множество:

$$K_1{}^u = \{f(a) \mid f(x) \in K_0(x), f'(a) \geq 0\}$$

есть верхний конус некоторого двумерного порядка, при котором K_1 является бесконечно узким полем.

Таким образом, эта теорема доказывает существование бесконечно узких полей и указывает алгоритм их построения.

Так, например, линейно упорядоченное поле $\mathbf{Q}(\pi)$ допускает структуру бесконечно узкого поля, где база есть поле $\mathbf{Q}$, а элемент π – бесконечно близок к базе и принадлежит открытому верхнему конусу построенного 2-порядка.

Конструкцию бесконечно узкого поля, определяемую теоремой 4.1.2, можно обобщить. Пусть K_0 есть линейно упорядоченное поле, $\widetilde{K}_0$ есть топологическое замыкание поля K_0

Пусть β – базис трансцендентности $\widetilde{K}_0$ над полем K_0. Известно, что на поле $\widetilde{K}_0$ единственным образом продолжается линейный порядок с поля K_0.

Сформулируем теперь центральный результат этой главы.

Теорема 4.1.3. Рассмотрим расширение $K = K_0(\beta)$ поля K_0 с помощью указанного базиса трансцендентности β. Тогда множество

$$K^u = \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \in K_0(x_1, \ldots, x_n), df(a_1, \ldots, a_n) \geq 0\},$$

где

$$df(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

$$\text{при } x_i = a_i,\ a_i \in \beta,\ dx_i = 1,$$

есть верхний конус некоторого двумерного порядка в поле K, при котором K является бесконечно узким полем.

Пусть теперь поле F допускает и линейное, и двумерное упорядочивание. Всегда ли в этом случае оно будет бесконечно узким? Во втором параграфе этой главы показано, что поле $F = \mathrm{Q}(\sqrt[3]{2})$ допускает и линейное, и двумерное упорядочивание, но не является бесконечно узким полем.

Уточнить структуру бесконечно узких полей помогает

Теорема 4.2.1. (Критерий бесконечно узкого поля). Пусть K двумерно упорядоченное поле. Поле K является бесконечно узким полем тогда и только тогда, когда правый конус K^r поля $\langle K, K^u \rangle$ является положительным конусом K^+ поля K.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Пестову Герману Гавриловичу за постановку задач и постоянное внимание ко всем этапам данной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы / Н. Бурбаки. – М. : Наука, 1965. – 300 с.
2. Варден Б.Л. ван дер. Алгебра / Б.Л. ван дер Варден. – СПб. : Лань, 2004. – 623 с.
3. Гёльдер О. Наглядное представление и мышление в геометрии // Новые идеи в математике. – 1914. – Сб. 8. – С. 79-80.
4. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа / Р. Дедекинд. – М. : Либроком, 2009. – 50 с. – Сер. Физико-математическое наследие: математика (теория чисел).
5. Ершов Ю.Л. О числе линейных порядков на поле // Математические заметки. – 1969. – Т. 6, вып. 2. – С. 201-211.
6. Кантор Г. Труды по теории множеств / Г. Кантор ; под общ. ред. А.Н. Колмогорова [и др.]. – М. : Наука, 1985. – 430 с.
7. Кокорин А.И. Линейно упорядоченные группы / А.И. Кокорин, В.М. Копытов. – М. : Наука. – 1972. – 200 с.
8. Копытов В.М. Решёточно упорядоченные группы / В.М. Копытов. – М. : Наука. – 1984. – 320 с.
9. Пестов Г.Г. n-мерные точечные системы // Труды Томского ордена Трудового Красного знамени государственного университета. – 1967. – Т. 191. – С. 158-163.
10. Пестов Г.Г. Теоремы о внешних точках и гранях n-мерной точечной системы // Труды Томского ордена Трудового Красного знамени государственного университета. – 1967. – Т. 191. – С. 164-174.

11. Пестов Г.Г. Глубина точки и функция сечений n-мерной точечной системы // Труды Томского ордена Трудового Красного знамени государственного университета. – 1967. – Т. 191. – С. 174-178.
12. Пестов Г.Г. n-упорядоченные множества // Труды Иркутского государственного университета. Сер. математическая. – 1970. – Т. 74, вып. 6. – С. 146-169.
13. Пестов Г.Г. Строение упорядоченных полей / Г.Г. Пестов. – Томск : Изд-во ТГУ, 1980. – 82 с.
14. Пестов Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях // Исследования по математическому анализу и алгебре : сб. научных трудов. – Томск : Изд-во ТГУ. – 2000. – С. 93-104.
15. Пестов Г.Г. Двумерно упорядоченные поля / Г.Г. Пестов.– Томск : Изд-во ТГУ, 2003. – 128 с.
16. Пестов Г.Г. К теории упорядоченных алгебраических систем : дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 : защищена 30.11.04 : утв. 13.05.05 / Герман Гаврилович Пестов. – Томск, 2003. – 261 с.
17. Пестов Г.Г. К теории упорядоченных полей и групп : автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Г.Г. Пестов. – Екатеринбург, 2004. – 44 с.
18. Пестов Г.Г. Упорядоченные поля и группы : сб. ст. / гл. ред. Г.В. Майер. – Томск : Изд-во ТГУ, 2004. – 44 с.
19. Проблемы Гильберта : сб. ст. / отв. ред. П.С. Александров. – М. : Наука, 1972. – 240 с.
20. Терре А.И. Некоторые вопросы теории 2-упорядоченных полей // Материалы Пятой научной конференции по математике и механике. – Томск. – 1975. – С. 85-86.
21. Терре А.И. О классе двумерно упорядочиваемых полей / А.И. Терре. – Томск, 1983. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.08.83, №4681-83.
22. Терре А.И. Строение архимедовых двумерно упорядоченных тел / А.И. Терре. – Томск, 1983. – 32 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.08.83, №4680-83.
23. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1965. – 343 с.
24. Шрайер О. Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении : пер. с нем. : в 2 т. / О. Шрайер, Е. Шпернер. – М.-Л. : ОНТИ, 1934. – Т. 1. – 210 с.
25. Baer R. Dichte, Archimedizität und Starrheit geordneter Körper // Math. Ann. – 1970. – Bd. 188, No. 3. – S. 165-205.
26. Conrad P. Archimedian Extensions of Lattice-Ordered Groups // J. Indian Math. Soc. – 1966. – Vol. 30. – P. 199-221.
27. Dedekind R. Stetigkeit und Irrationale Zahlen / R. Dedekind. – Achte Auflage. – Berlin : Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967. – 52 s.

28. Delon F. Plongement dense d'un corp ordonné dans sa cloture réelle // Journal of Symb. Logic. – 1991. – Vol. 56, No. 3. – P. 974-980.
29. Glock E. Die orientierungsfunktionen eines affinen Raumes // Math. Z. – 1962. – Bd. 78, No. 4. – S. 319-360.
30. Hafner P., The cofinal character of uniform spaces and ordered fields / P. Hafner, G. Mazzola // Zetschr. für math. Logik und Grundlagen d. Math. – 1971. – Bd. 17. – S. 377-384.
31. Novoa L.G. On *n*-ordered sets and order completeness // Pacific J. Math. –1965. – Vol. 15, No. 4. – P. 1337-1345.
32. Novoa L.G. Ten axioms for three-dimensional Euclidean geometry // Proc. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 19. – P. 146-152.
33. Novoa L.G. Independence of a certain axiomatic system // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 22. – P. 470.
34. Novoa L.G. Order characterization of the complex field // Can. Math. Bull. – 1978. – Vol.21, No.3. – P. 313-318.
35. Pickert G. Einfürung in die Höere Algebra / G. Pickert. – Göttingen, 1951.
36. Sperner E. Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie // Arch. Math. – 1940. – Bd. 121. – S. 107-130.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. ***Фомина Е.А.* О бесконечно близких к базе элементах / Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина // Вестник ТГУ. – 2007. – № 297. – С. 157-158. – 0,13 / 0,1 п.л.** (Поступила в научную редакцию «Вестника ТГУ» 01.12.06, принята к печати 08.12.06. Входит в перечень ведущих рецензируемых научных журналов ВАК (2001-2005 г.г., письмо ВАК от 30.11.06)).
2. *Фомина Е.А.* О 2-упорядоченных полях без бесконечно малых над базой / Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина // Актуальные проблемы математики и методики её преподавания : материалы заочной Всероссийской научно-практической конференции. – 2007. – Томск : Изд-во. ТГПУ. – С. 32-39. – 0,5 / 0,25 п.л.
3. *Фомина Е.А.* Бесконечно близкие к базе элементы // Сб. материалов Науч. конф. молодых учёных, аспирантов и студентов ММФ ТГУ, посвящённой 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера, 16-21 апреля 2007 г. Томск : Изд-во ТГУ, 2007. – С. 134-135. – 0,13 п.л.
4. *Фомина Е.А.* О сечениях в базе 2-упорядоченного поля / Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина // Вестник ТГУ. – 2007. – № 301. – С. 94-96. – 0,19 / 0,1 п.л.
5. *Фомина Е.А.* Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля / Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина // Вестник ТГУ. Сер. Математика и механика. – 2007. – № 1. – С. 50-53. – 0,25 / 0,13 п.л.

6. *Фомина Е.А.* Об одном классе двумерно упорядоченных полей // Всероссийская конференция по математике и механике, г. Томск, 22-25 сентября 2008 г. : тезисы докладов. – Томск : Изд-во ТГУ, 2008. – С. 65-66. – 0,13 п.л.
7. *Фомина Е.А.* Об одном классе двумерно упорядоченных полей // Вестник ТГУ. Сер. Математика и механика. – 2008. – № 3 (4). – С. 32-34. – 0,19 п.л.
8. *Фомина Е.А.* Критерий бесконечно узкого поля // Вестник ТГУ. Сер. Математика и механика. – 2009. – № 1 (5). – С. 27-30. – 0,25 п.л.
9. *Фомина Е.А.* Подполе *B* бесконечно близких к базе элементов / Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина // Вестник ТГУ. Сер. Математика и механика. – 2009. – № 2 (6). – С. 41-47. – 0,44 / 0,22 п.л.
10. *Фомина Е.А.* Некоторые конструкции 2-упорядоченных полей // Наука и образование XII : Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых учёных (21-25 апреля 2008 г.) : в 6 т. – Томск : Изд-во ТГПУ, 2009. – Т. 1 : Естественные и точные науки, ч. 1 : Физика и математика. – С. 91-93. – 0,19 п.л.

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
редакционно-издательского отдела ТГУ

Заказ №161 от « 6 » 11 2009 г. Тираж 110 экз.